Лекция 6
Бернуллидің тәуелсіз сынақтар тізбегі.
Бернулли схемасы үшін үлкен сандар заңы.

Бернулли схемасы немесе әр сынағының тек екі ғана нәтижесі болатын n тәуелсіз сынақтар тізбегіне сәйкес ықтималдықтық моделі деп біз мына төмендегідей анықталған $(\Omega, \mathsf{F}, \mathrm{P})$ ақырлы ықтималдық кеңістігін айтқамыз, мұндағы

$$\Omega = \{\omega: \omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n), \omega_i = 0 \text{ немесе } 1\}, \ \mathsf{F} = \{A: A \subseteq \Omega\},$$

$$\mathrm{P}(\omega) = p^{\sum_{i=1}^{n} \omega_i} q^{n - \sum_{i=1}^{n} \omega_i} \qquad (q = 1 - p)$$

ал p -"табыс" ықтималдығы.

Жаңа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ кездейсоқ шамаларын былай енгізелік: $\xi_i(\omega) = \xi_i(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \omega_i$. Бұл бернуллилік кездейсоқ шамалар өзара тәуелсіз және бірдей үлестірілген:

$$\mathrm{P}\{\xi_i = 1\} = p, \qquad \mathrm{P}\{\xi_i = 0\} = q, \ i = 1,2,\ldots n.$$

Сонымен, ξ_i кездейсоқ шамасы i -ші сынақтың нәтижесін сипаттайды: егер i -сынақта табыс болса, $\xi_i = 1$ ал i -ші сынақта сәтсіздік болса $\xi_i = 0$. Жалпы табыс санын білдіретін $\mu_n = \mu_n(\omega)$ кездейсоқ шамасы былай анықталады: $\mu_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$. Онда $\mathrm{M}\mu_n = np$, демек $\mathrm{M}\left(\frac{\mu_n}{n}\right) = p$. Мағынасы бойынша $\frac{\mu_n}{n}$ шамасы табыстың орташа жилігін береді, сондықтан $\mathrm{M}\left(\frac{\mu_n}{n}\right) = p$ қатынасы орташа табыс жилігі p -ға тең болатынын көрсетеді. Бұдан мынандай орынды сұрақ туады: "табыстың" пайда болу жиілігінің "табыс" ықтималдығы p -дан ауытқуының шамасын қалай бағалауға болады?

Ең алдымен кез-келген аса аз $\varepsilon > 0$ шамасы үшін

$$\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| \le \varepsilon \tag{1}$$

теңсіздігі барлық $\omega \in \Omega$ үшін орындалады деп үміттенуге болмайтынына назар аудара кетелік. Шындығында да $0 < 1 < p$ үшін

$$P\left\{\omega:\frac{\mu_n(\omega)}{n}=1\right\}=P\left\{\omega:\xi_1(\omega)=1,\xi_2(\omega)=1,\dots,\xi_n(\omega)=1\right\}=p^n \qquad (2)$$

$$P\left\{\omega:\frac{\mu_n(\omega)}{n}=0\right\}=P\left\{\omega:\xi_1(\omega)=0,\xi_2(\omega)=0,\dots,\xi_n(\omega)=0\right\}=q^n$$

Бұдан (1) теңсіздіктің жеткілікті аз $\varepsilon>0$ үшін орындалмайтынын байқаймыз. Бірақ аса үлкен n үшін (2) ықтималдықтар өте аз болатыны түсінікті. Сондықтан $\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|>\varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай барлық ω-лардың ықтималдықтарының қосындысы жеткілікті үлкен n-дер үшін аз болады-ау деп күтуге болатыны түсінікті. Шындығында да Чебышев теңсіздігін $\frac{\mu_n(\omega)}{n}$ кездейсоқ шамасына пайдалансақ және $D\left(\frac{\mu_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}D\mu_n=\frac{npq}{n^2}=\frac{pq}{n}$ болатынын еске алсақ, онда

$$P\left\{\omega:\left|\frac{\mu_n(\omega)}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{D\left(\frac{\mu_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}=\frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

Бірақ $0<p<1,\ p+q=1$ Їшін $pq=p(1-q)\leq\frac{1}{4}$ болатындықтан

$$P\left\{\omega:\left|\frac{\mu_n(\omega)}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{pq}{n\varepsilon^2}\leq\frac{1}{4n\varepsilon^2} \qquad (3)$$

Соңғы теңсіздіктен $n>>1$, яғни жеткілікті үлкен n үшін "табыстың" салыстырмалы жиілігінің "табыс" ықтималдығынан ауытқуының берілген $\varepsilon>0$ – нан үлкен болу ықтималдығы жеткілікті аз болатыны шығады.

Егер

$$P_n(k)=P\{\omega:\mu_n(\omega)=k\}=C_n^k p^n q^{n-k}$$

болатынын еске алсақ, онда (3) теңсіздікті басқаша былай жаза аламыз:

$$P\left\{\omega:\left|\frac{\mu_n(\omega)}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right\}=\sum_{\left\{k:\left|\frac{k}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right\}}C_n^k p^k q^{n-k}\leq\frac{pq}{n\varepsilon^2}\leq\frac{1}{4n\varepsilon^2} \qquad (4)$$

Іс жүзінде біз ықтималдықтық мағынасы бар (3) теңсіздікті пайдалану арқылы басқаша, аналитикалық түрде дәлелдеуге болатын

$$\sum_{\{k:|k-np|\geq n\varepsilon\}}C_n^k p^k q^{n-k}\leq\frac{pq}{n\varepsilon^2} \qquad (4')$$

теңсіздігін алдық. Соңғы теңсіздіктен

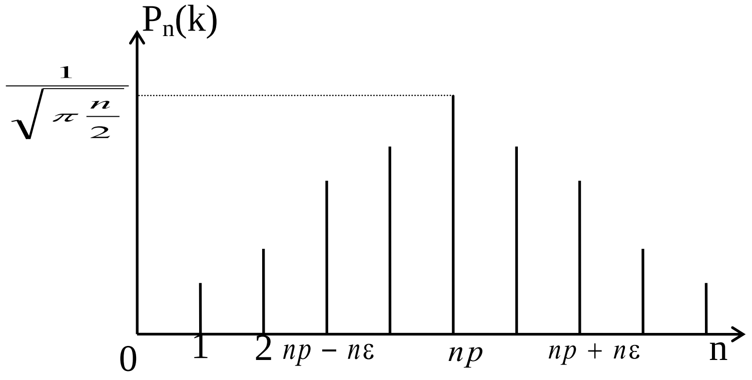
$$\sum_{\{k:|k-np|\geq n\varepsilon\}}P_n(k)=\sum_{\{k:|k-np|\geq n\varepsilon\}}C_n^k p^k q^{n-k}\to 0,\ n\to\infty \qquad (5)$$

немесе

$$\sum_{\{k:|k-np|<n\varepsilon\}} \mathrm{P}_n(k) = \sum_{\{k:|k-np|<n\varepsilon\}} C_n^k p^k q^{n-k} \to 1\ ,\ n\to\infty \qquad (5')$$

болатындығын көреміз.

График түрінде соңғы тұжырымдарды былай түсіндіруге болады. Биномдық үлестірім $\{\mathrm{P}_n(k), k=0,1,\ldots,n\}$-ны суретте көрсеткендей етіп кескінделік.



Онда n -скен сайын барлық кескін "жайыла" береді де, биіктігі бойынша "қысыла" береді. Және де $np-n\varepsilon \le k \le np+n\varepsilon$ шартын қанағаттандыратын k -лар бойынша $\mathrm{P}_n(k)$-лардың қосындысы бірге ұмтылады.

(4) тұжырымды формалды түрде былайша

$$\mathrm{P}\left\{\omega : \left|\frac{\mu_n(\omega)}{n} - p\right| \ge \varepsilon\right\} \to 0\ ,\ n\to\infty \qquad (6)$$

жазуға болар еді. Бұлайша жазу ықтималдықтар теориясы тұрғысынан қисынды бола ма деген сұраққа жауап бере кетелік. Мәселе мынада: егер $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ кеңістігінде анықталған $\xi_1, \xi_2, \ldots$ бернуллилік тәуелсіз кездейсоқ шамалар тізбегі бар болса және де P осы кеңістікте анықталған ықтималдық болса, онда (6) жазу, әрине, ықтималдықтық тұрғыдан дұрыс болар еді. Ал шындығында да бұл объектілерді құрастыруға, сөйтіп (6) қатынасқа заңды түрде ықтималдықтық мағына беруге болады екен. Басқаша айтқанда мынадай тұжырымды дәлелдеуге болады: $\xi_1, \xi_2, \ldots$ бернуллилік тәуелсіз кездейсоқ шамалар тізбегі анықталатын $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ ықтималдық кеңістігі әрқашан табылады (бар болады). Бұл кеңістікте, мәселен, $\Omega = \{\omega : \omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots), \omega_i = 0 \text{ немесе } 1\}$ деп алуға болады.

Егер біз (5) аналитикалық тұжырымға ықтималдықтық тұрғыдан мағына бергіміз келсе, онда әзірше біз мынаны ғана дәлелдедік:

Айталық $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathrm{P}_n)$, $n \ge 1$, мынадай Бернуллилік схемалар тізбегі болсын:

$$\Omega_n = \{\omega_n : \omega_n = (\omega_{n1}, \omega_{n2}, \ldots, \omega_{nn}), \omega_{ni} = 0 \text{ немесе } 1\}$$

$$\mathcal{F}_n = \{A_n : A_n \subseteq \Omega_n\}$$

$$\mathrm{P}_n(\omega_n) = p^{\sum_{i=1}^{n}\omega_{ni}} q^{n-\sum_{i=1}^{n}\omega_{ni}}$$

$$\mu_n(\omega_n) = \omega_{n1} + \omega_{n2} + \ldots + \omega_{nn} = \xi_{n1}(\omega_n) + \xi_{n2}(\omega_n) + \ldots + \xi_{nn}(\omega_n),$$

мұнда әрбір $n \geq 1$ үшін $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nn}$- тәуелсіз бірдей үлестірілген бернуллилік кездейсоқ шамалар тізбегі: $\xi_{ni}(\omega_n) = \omega_{ni}$

Онда кез келген $\varepsilon > 0$ үшін

$$\mathrm{P}_n\left\{\omega_n : \left|\frac{\mu_n(\omega_n)}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\} = \sum_{\left\{k : \left|\frac{k}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\}} \mathrm{P}_n(k) \to 0, \quad n \to \infty \tag{7}$$

(5)-(7) түріндегі тұжырымдар ықтималдықтар теориясында *Я.Бернуллидің үлкен сандар заңы (әлсіз үлкен сандар заңы)* деп аталады.

(5)-қатынасты ең алғаш рет Я.Бернулли биномдық $\mathrm{P}_n(k)$ ықтималдықтарының $|k - np| \geq n\varepsilon$ шартын қанағаттандыратын қалдықтарын қатаң бағалау арқылы дәлелдеген. Ал (5) қатынастың сол жағындағы ықтималдықтардың қосындысын есептеу көп еңбектенуді қажет етеді, оның үстіне алынған формулалардың іс жүзінде $\frac{\mu_n}{n}$ салыстырмалы жилігінің p ықтималдығынан ауытқуының ықтималдығын есептеу үшін пайдасы шамалы. Міне, сондықтан да $\mathrm{P}_n(k)$ ықтималдықтары үшін $p = \frac{1}{2}$ жағдайында Муавр, кез келген $0 < p < 1$ үшін Лаплас дәлелдеген асимптотикалық жуықтау формулаларының маңызы аса зор. Бұл формулалар үлкен сандар заңын жаңадан қайта дәлелдеуге ғана мүмкіндік беріп қоймайды, сонымен бірге оны ары қарай дәлдей, егжей- тегжейлей түсуге де мүмкіндіктер береді- олар бүгінде Муавр-Лапластың төңіректік (локальдық) және интегралдық теоремалары деген атпен белгілі теоремалар (IV-тарауды қараңыз). Бұл теоремалардың мәні мынада- жеткілікті үлкен n мен $k \sim np$ -лар үшін

$$\mathrm{P}_n(k) \sim \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}$$

$$\sum_{\{k : |k-np| \leq n\varepsilon\}} \mathrm{P}_n(k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon\sqrt{n/pq}}^{\varepsilon\sqrt{n/pq}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Жоғарыда айқанымыздай бұл теоремалардың дәл айтылулары мен дәлелдеулері келесі IV-тарауда толық қарастырылады. Ал қазір үлкен сандар заңының нақты мағынасы неде, оны эмпирикалық түрде қалай түсіндіруге болады деген сұраққа толығырақ тоқтала кетелік.

Айталық N тәжірбиелер сериясы жүргізілсін, ал өз кезегінде әр серия n тәуелсіз сынақтар тізбегінен тұрсын және де мұнда (бұл серияда) әр сынақ нәтижесінде белгілі бір (бізге қажетті) A оқиғасы $p = \mathrm{P}(A)$ тең ықтималдықпен пайда болатын не $q = 1 - p$-ға тең ықтималдықпен пайда болмайтын болсын. Ары қарай i-ші сериядағы A оқиғасының пайда болу жилігін $\frac{\mu_{ni}}{n}$ деп белгілелік те, N_ε - арқылы жиліктің "табыс" ықтималдығы p-дан ауытқуы ε-нен артпайтын сериялар санын белгілелік:

$$N_\varepsilon = \sum_{i=1}^{N} I_{\left\{\left|\frac{\mu_{ni}}{n} - p\right| \le \varepsilon\right\}}$$

Онда

$$\frac{N_\varepsilon}{N} \sim \mathrm{P}_\varepsilon = \mathrm{P}\left\{\left|\frac{\mu_{ni}}{n} - p\right| \le \varepsilon\right\}$$

Соңғы қатынасты дәлдей тЇсу жолында біз жоғарыда $\mathrm{P}\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| \le \varepsilon\right\}$ ықтималдықтарын бағалаған кездегідей қиындықтарға ((6) формуланы, одан кейінгі текстті қараңыз) кездесуге тура келетінін ескерте кетелік.

§2. Муавр-Лапластың шектік теоремалары.

Өткен параграфтағы секілді $\mu_n(\omega) = \xi_1(\omega) + \xi_2(\omega) + \ldots + \xi_n(\omega)$ болсын.

Онда
$$M\left(\frac{\mu_n}{n}\right) = p \tag{1}$$

$$D\left(\frac{\mu_n}{n}\right) = M\left(\frac{\mu_n}{n} - p\right)^2 = \frac{pq}{n} \tag{2}$$

(1) формуладан $\frac{\mu_n}{n} \sim p$ болатынын байқаймыз, мұндағы эквиваленттілік белгісі ~-ге үлкен сандар заңында $P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right\}$ ықтималдықтарының бағалары арқылы дәл ықтималдықтық мағынасын (интерпретациясын) бергенбіз. Сондықтан да (2) формуладан шығатын

$$\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| \sim \sqrt{\frac{pq}{n}} \tag{3}$$

қатынасына , мәселен

$$P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| \le x\sqrt{\frac{pq}{n}}\right\} \tag{4}$$

ықтималдықтарын қарастыру арқылы ықтималдықтық мағына беруге болатын шығар деген ой туатыны орынды. Егер

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad 0 \le k \le n \tag{5}$$

болса, онда

$$P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| \le x\sqrt{\frac{pq}{n}}\right\} = P\left\{\left|\frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}}\right| \le x\right\} = \sum_{\left\{k:\left|\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right| \le x\right\}} P_n(k) \tag{6}$$

Енді (6) формуланың оң жағындағы теңдіктерді қанағаттандыратын k -лар үшін $P_n(k)$ мен олардың қосындылары үшін ыңғайлы жуықтап есептеу формулаларын табумен айналысамыз. Ол формулалар әдебиетте *Муавр-Лапластың төңіректік (локальдық) теоремасы* және *Муавр-Лапластың интегралдық теоремасы* деген атпен белгілі.

2.1. Муавр-Лапластың т-ңіректік теоремасы.

$P_n(k)$ үшін жуықтау формуласын жоғарыдағыдай $|k - np| = O\left(\sqrt{npq}\right)$ шартын қанағаттандыратын k -лер үшін ғана емес, $|k - np| = o\left((npq)^{2/3}\right)$ шартын қанағаттандыратын k -лер үшін де табуға болатынын көрсетелік.

3-Теорема (*Муавр-Лапластың төңіректік теоремасы*). Айталық $0 < p < 1$ болсын. Онда $|k - np| = o\left((npq)^{2/3}\right)$ шартын қанағаттандыратын барлық k -лар үшін бірқалыпты түрде

$$P_n(k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}, \tag{7}$$

яғни $n \to \infty$ жағдайда

$$\sup_{\{k:|k-np| \le \varphi(n)\}} \left| \frac{P_n(k)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}} - 1 \right| \to 0, \tag{8}$$

мұндағы $\varphi(n) = o\left((npq)^{2/3}\right)$.

Ескерту. Теореманы дәлелдемес бұрын мынаған назар аударалық. Егер

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{9}$$

функциясын енгізсек және $x_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ деп белгілесек, онда теореманы былай тұжырымдауға болар еді:

$0 < p < 1$ болсын. Онда барлық $x_k \sim o\left((npq)^{1/6}\right)$ үшін

$$P_n(k) = P\{\mu_n = k\} = P_n\left(np + x_k\sqrt{npq}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_k), \tag{10}$$

яғни $n \to \infty$ жағдайда

$$\sup_{\{x_k : |x_k| \le \psi(n)\}} \left| \frac{\sqrt{npq}\, P_n\left(np + x_k\sqrt{npq}\right)}{\varphi(x_k)} - 1 \right| \to 0 \tag{11}$$

Мұндағы $\psi(n) = o(npq)^{1/6}$

Теореманың дәлелдеуі. Кездесетін факториалдарды мына Стирлинг формуласын пайдаланып жуықталық:

$$n! = \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n e^{\theta(n)} = \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n (1 + R(n)), \tag{12}$$

мұндағы $\frac{1}{12n + 1} < \theta(n) < \frac{1}{12n}$ және $R(n) \to 0 \ (n \to \infty)$.

Онда, егер $n \to \infty$, $k \to \infty$, $n - k \to \infty$ болса

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n \left(1 + R(n)\right)}{\sqrt{2\pi k} e^{-k} k^k \left(1 + R(k)\right) \sqrt{2\pi(n-k)} e^{-(n-k)} (n-k)^{n-k} \left(1 + R(n-k)\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n \frac{k}{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)}} \cdot \frac{1 + \varepsilon}{\left(\frac{k}{n}\right)^k \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n-k}},$$

мұндағы

$$\varepsilon = \varepsilon(k, n, n-k) = \frac{1 + R(n)}{\left(1 + R(k)\right)\left(1 + R(n-k)\right)} - 1 \to 0 \ (n \to \infty, k \to \infty, n - k \to \infty)$$

Егер $\hat{p} = \frac{k}{n}$ белгілеуін енгізсек, былай жаза аламыз

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n \hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}} \cdot \left(\frac{p}{\hat{p}}\right)^k \left(\frac{1-p}{1-\hat{p}}\right)^{n-k} \left(1+\varepsilon\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n \hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}} \cdot \exp\left\{k \cdot \ln\frac{p}{\hat{p}} + (n-k)\ln\frac{1-p}{1-\hat{p}}\right\}\left(1+\varepsilon\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n \hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}} \cdot \exp\left\{-n\left[\frac{k}{n}\ln\frac{\hat{p}}{p} + \left(1-\frac{k}{n}\right)\ln\frac{1-\hat{p}}{1-p}\right]\right\}\left(1+\varepsilon\right). \qquad (13)$$

Мынандай функция енгізелік:

$$H(x) = x \cdot \ln\frac{x}{p} + (1-x)\ln\frac{1-x}{1-p} \qquad (14)$$

Онда былай жаза аламыз:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n \hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}} \cdot \exp\left\{-nH\left(\hat{p}\right)\right\}\left(1+\varepsilon\right)$$

Біз қарастырып отырған k-лар үшін $\left|k - np\right| = o\left((npq)^{2/3}\right)$, ендеше $\left|p - \hat{p}\right| = \left|\frac{k-np}{n}\right| = o\left(\left(pq/\sqrt{n}\right)^{2/3}\right) \to 0 \quad (n \to \infty)$. Осыны ескеріп $H\left(\hat{p}\right)$ функциясын p-нүктесінің маңында Тейлор формуласын пайдаланып жіктелік:

$$H\left(\hat{p}\right) = H\left(p + \left(\hat{p} - p\right)\right) = H(p) + H'(p)\left(\hat{p} - p\right) + \frac{1}{2}H''(p)\left(\hat{p} - p\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{6}H'''(p)\left(\hat{p} - p\right)^3 + \ldots$$

(14) формуладан

$$H'(x) = \ln\frac{x}{p} - \ln\frac{1-x}{1-p},$$

$$H''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x},$$

$$H'''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2}$$

Ендеше

$$H(p) = H'(p) = 0, \quad H''(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} = \frac{1}{pq}, H'''(p) = -\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} = \frac{q-p}{p^2q^2}.$$

Оның үстіне қарастырып отырған k -лар үшін $n \to \infty$ кезде

$$\frac{1}{2}nH''(p)\left(\hat{p} - p\right)^2 = \frac{n}{2pq}\left(\frac{k}{n} - p\right)^2 = \frac{(k-np)^2}{2npq}$$

$$\frac{1}{6}nH'''(p)\cdot\left(\hat{p} - p\right)^3 = o(1)$$

Демек біз былай жаза аламыз:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}\left(1 + \tilde{\varepsilon}(k,n,n-k)\right),$$

мұндағы $\quad 1 + \tilde{\varepsilon}(k,n,n-k) = \left(1 + \varepsilon(k,n,n-k)\right)\left(1 + o(1)\right)\sqrt{\frac{p(1-p)}{\hat{p}(1-\hat{p})}}$

Оның үстіне $\varphi(n) = o\left((npq)^{2/3}\right)$ үшін

$$\sup_{\{k : |k-np| \le \varphi(n)\}} \left|\tilde{\varepsilon}(k,n,n-k)\right| \to 0, \quad n \to \infty$$

болатынын көрсету қиын емес. Соңғы айтылғандар (10) қатынастың дұрыстығын көрсетеді. ♦

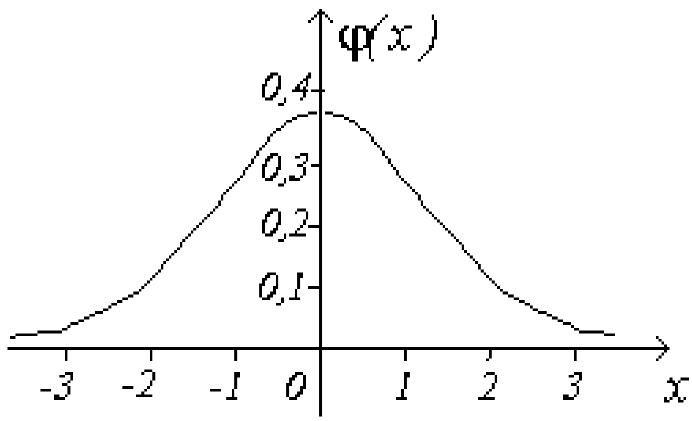
Сөз соңында (10),(11) қатынастарды былай да жазуға болатынына назар аудара кетелік

$$P\{\mu_n = k\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}, \quad |k - np| = o\left((npq)^{2/3}\right) \qquad (10'')$$

$$P\left\{\frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} = x\right\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = o(npq)^{1/6} \qquad (13^1)$$

(Соңғы формулада $np + x\sqrt{npq} \in \{0,1,2,\dots n\}$).

Жоғарыда енгізілген $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ функциясының ықтималдықтар теориясында алатын өзіндік аса маңызды орны бар. Бұл функция *нормал (қалыпты) кездейсоқ шама* деп аталатын кездейсоқ шаманың *үлестірім тығыздығы* деп аталатын функциясы болады. Бұл функцияның мәндері әртүрлі x-тер үшін есептеліп қойылған және ықтималдықтар теориясына арналған көптеген кітаптарда ол мәндері таблица түрінде беріліп отырады да. Біз бұл жерде тек бұл функцияның жұп функция болатынын, $x \to \infty$ кезде өте тез түрде $\varphi(x) \to 0$ (мәселен $\varphi(0) \approx 0.399$, $\varphi(1) \approx 0.24197$, $\varphi(2) \approx 0.053991$, $\varphi(3) \approx 0.004432$, $\varphi(4) \approx 0.000134$, $\varphi(5) \approx 0.000016$), $x = \pm 1$ нүктелері иілу нүктелері және максималды мәнін $x=0$ нүктесінде $\left(\varphi_{\max} = \varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.4\right)$ қабылдайтынын айта кетелік. Оның графигінің сыйпаты төменде көрсетілген



Мысал. Қандай да бір заводтан шыққан бұйымдардың кез келгенінің ақаулы бұйым болу ықтималдығы 0.005 болсын. Кездейсоқ алынған 10000 бұйымның ішінде дәл 40 бұйымның ақаулы бұйым болу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Бізде $n=10000$, $p=0.005$, $k=40$. Ендеше ізделінді ықтималдық мынаған тең:

$$P_{10000}(40) = C_{10000}^{40}(0.005)^{40}(0.995)^{9960}$$

Көрініп тұрғандай, бұл ықтималдықтың дәл мәнін табу оңай шаруа емес. Жуықтап есептеу үшін (10') формуланы пайдаланалық. Онда

$$\sqrt{npq} = \sqrt{10000 \cdot 0.005 \cdot 0.995} = \sqrt{49.75} \approx 7.05$$

$$x_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \approx -1.42$$

Таблицадан $\varphi(1.42) = 0.1456$. Бұдан

$$P_{10000}(40) \approx \frac{0.1456}{7.05} \approx 0.0206$$

Муавр-Лаплас теоремасын пайдаланбай, тікелей есептеу

$$P_{10000}(40) \approx 0.0197$$

болатынын көрсетеді.

Муавр-Лаплас теоремасы арқылы жуықтаудың сипатын байқау үшін p =0.2, n =25 үшін таблица құрастырып көрсетелік (таблицадағы мәндер үтірден кейінгі төртінші ондық таңбаға дейінгі дәлдікпен есептелген).

p=0.2, n=25 Таблица

k	$x_к$	$P_n(k)$	$\sqrt{npq}\,P_n(k)$	$\varphi(x_k)$
0	-2.5	0.0037	0.0075	0.0175
1	-2.0	0.0236	0.0472	0.0540
2	-1.5	0.0708	0.1417	0.1295
3	-1.0	0.1358	0.2715	0.2420
4	-0.5	0.1867	0.3734	0.3521
5	0.0	0.1960	0.3920	0.3989
6	0.5	0.1633	0.3267	0.3521
7	1.0	0.1108	0.2217	0.2420
8	1.5	0.0623	0.1247	0.1295
9	2.0	0.0294	0.0589	0.0540
10	2.5	0.0118	0.0236	0.0175
11	3.0	0.0040	0.0080	0.0044
12	3.5	0.0012	0.0023	0.0009
13	4.0	0.0003	0.0006	0.0001
14	4.5	0.0000	0.0000	0.0000
>14	>4.5	0.0000	0.0000	0.0000